

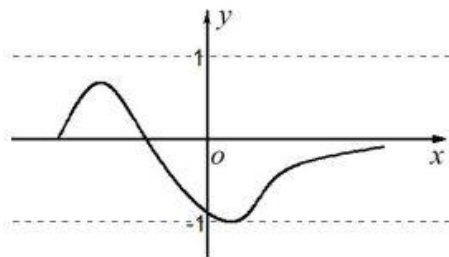
2019 年中考阅读材料新题型备考训练

例 1. 对某一个函数给出如下定义, 若存在实数 $M > 0$, 对于任意的函数值 y , 都满足 $-M \leq y \leq M$, 则称这个函数是有界函数, 在所有满足条件的 M 中, 其最小值称为这个函数的边界值, 例如, 下图中的函数是有界函数, 其边界值是 1.

(1) 判断函数 $y = \frac{1}{x} (x > 0)$ 和 $y = x + 1 (-4 < x \leq 2)$ 是不是有界函数? 若是有界函数, 求出其边界值.

(2) 若函数 $y = -x + 1 (a \leq x \leq b, b > a)$ 边界值是 2, 且这个函数的最大值也是 2, 求 b 的取值范围.

(3) 将函数 $y = x^2 (-1 \leq x \leq m, m \geq 0)$ 的图象向下平移 m 个单位, 得到的函数的边界是 t , 当 m 在什么范围时满足 $\frac{3}{4} \leq t \leq 1$.



例 2. 对于平面直角坐标系 xOy 中的图形 M, N , 给出如下定义: P 为图形 M 上任意一点, Q 为图形 N 上任意一点, 如果 P, Q 两点间的距离有最小值, 那么称这个最小值为图形 M, N 间的“闭距离”, 记作 $d(M, N)$.

已知点 $A(-2, 6)$, $B(-2, -2)$, $C(6, -2)$.

(1) 求 $d(\text{点 } O, \triangle ABC)$.

(2) 记函数 $y = kx (-1 \leq x \leq 1, k \neq 0)$ 的图象为图形 G , 若 $d(G, \triangle ABC) = 1$, 直接写出 k 的取值范围.

(3) $\odot T$ 的圆心为 $T(t, 0)$, 半径为 1. 若 $d(\odot T, \triangle ABC) = 1$, 直接写出 t 的取值范围.

例 3. 在直角坐标系 xOy 中, 对于点 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y')$ 给出如下定义:

若 $y' = \begin{cases} y(x \geq 0) \\ -y(x < 0) \end{cases}$, 则称点 Q 为点 P 的“可控变点”.

例如: 点 $(1, 2)$ 的“可控变点”为点 $(1, 2)$, 点 $(-1, 3)$ 的“可控变点”为点 $(-1, -3)$.

(1) 若点 $(-1, -2)$ 是一次函数 $y = x + 3$ 图象上点 M 的“可控变点”, 求点 M 的坐标为_____.

(2) 若点 P 在函数 $y = -x^2 + 16 (-5 \leq x \leq a)$ 的图象上, 其“可控变点” Q 的纵坐标 y' 的取值范围是 $-16 < y' \leq 16$, 求实数 a 的取值范围.

例 4. 深化理解: 对非负实数 x “四舍五入”到个位的值记为 $\langle x \rangle$,

即: 当 n 为非负整数时, 如果 $n - \frac{1}{2} \leq x < n + \frac{1}{2}$, 则 $\langle x \rangle = n$.

如: $\langle 0 \rangle = \langle 0.48 \rangle = 0, \langle 0.64 \rangle = \langle 1.493 \rangle = 1, \langle 2 \rangle = 2, \langle 3.5 \rangle = \langle 4.12 \rangle = 4, \dots$

试解决下列问题:

(1) 填空: ① $\langle \pi \rangle =$ _____ (π 为圆周率).

② 如果 $\langle 2x-1 \rangle = 3$, 则实数 x 的取值范围为_____.

(2) ① 当 $x \geq 0, m$ 为非负整数时, 求证: $\langle x+m \rangle = m + \langle x \rangle$.

② 举例说明 $\langle x+y \rangle = \langle x \rangle + \langle y \rangle$ 不恒成立.

(3) 求满足 $\langle x \rangle = \frac{4}{3}x$ 的所有非负实数 x 的值;

(4) 设 n 为常数, 且为正整数, 函数 $y = x^2 - x + \frac{1}{4}$ 的自变量 x 在 $n \leq x \leq n+1$ 范围内取值时, 函数 y 为整

数的个数记为 a ; 满足 $\langle \sqrt{k} \rangle = n$ 的所有整数 k 的个数记为 b . 求证: $a = b = 2n$.

例 5. 在平面直角坐标系中, 对于任意两点与的“非常距离”, 给出如下定义:

若 $|x_1 - x_2| \geq |y_1 - y_2|$, 则点 P_1 与点 P_2 的“非常距离”为 $|x_1 - x_2|$;

若 $|x_1 - x_2| < |y_1 - y_2|$, 则点 P_1 与点 P_2 的“非常距离”为 $|y_1 - y_2|$.

例如: 点 $P_1(1, 2)$, 点 $P_2(3, 5)$, 因为 $|1-3| < |2-5|$, 所以点 P_1 与点 P_2 的“非常距离”为 $|2-5| = 3$, 也就是

图 1 中线段 P_1Q 与线段 P_2Q 长度的较大值 (点 Q 为垂直于 y 轴的直线 P_1Q 与垂直于 x 轴的直线 P_2Q 的交点).

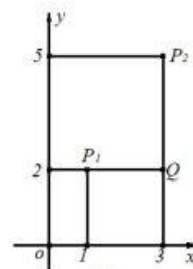


图1

(1) 已知点 $A(-\frac{1}{2}, 0)$, 点 B 为 y 轴上的一个动点,

① 若点 A 与点 B 的“非常距离”为 2, 写出一个满足条件的点 B 的坐标;

② 直接写出点 A 与点 B 的“非常距离”的最小值;

(2) 已知 C 是直线 $y = \frac{3}{4}x + 3$ 上的一个动点,

①如图2,点 D 的坐标是 $(0,1)$,求点 C 与点 D 的“非常距离”的最小值及相应的点 C 的坐标;

②如图3, E 是以原点 O 为圆心,1为半径的圆上的一个动点,求点 C 与点 E 的“非常距离”的最小值及相应的点 E 和点 C 的坐标.

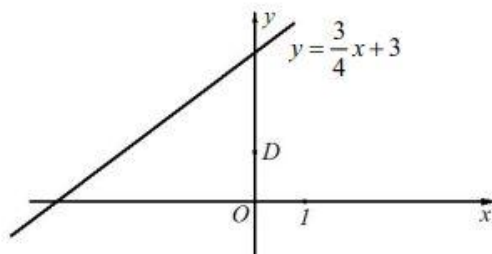


图2

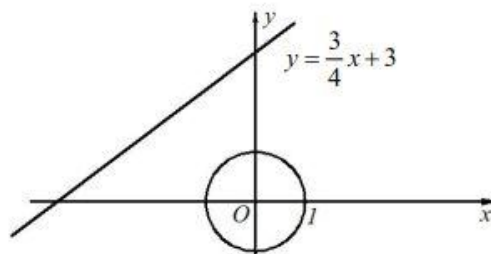


图3

例6.在平面直角坐标系中,我们不妨把横坐标和纵坐标相等的点叫“梦之点”,例如点 $(1,1),(-2,-2),(\sqrt{2},\sqrt{2}),\dots$ 都是“梦之点”,显然“梦之点”有无数个.

(1)若点 $P(2,m)$ 是反比例函数 $y = \frac{n}{x}$ (n 为常数, $n \neq 0$)的图象上的“梦之点”,求这个反比例函数的解析式.

(2)函数 $y = 3kx + s - 1$ (k, s 为常数)的图象上存在“梦之点”吗?若存在,请求出“梦之点”的坐标,若不存在,说明理由.

例7.如果方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两个根是 x_1, x_2 ,那么 $x_1 + x_2 = -p, x_1 \cdot x_2 = q$,请根据以上结论,解决下列问题:

(1)已知关于 x 的方程 $x^2 + mx + n = 0$ ($n \neq 0$),求出一个一元二次方程,使它的两个根分别是已知方程两根的倒数;

(2)已知 a, b 满足 $a^2 - 15a - 5 = 0, b^2 - 15b - 5 = 0$,求 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ 的值;

(3)已知 a, b, c 满足 $a + b + c = 0, abc = 16$,求正数 C 的最小值.

例 8. 若 x_1, x_2 是关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两个根, 则方程的两个根 x_1, x_2 和系数

a, b, c 有如下关系: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. 我们把它们称为根与系数关系定理.

如果设二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象与 x 轴的两个交点为 $A(x_1, 0), B(x_2, 0)$ 利用根与系数关系定理我们又可以得到 A, B 两个交点间的距离为:

$$AB = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{4c}{a}} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}.$$

请你参考以上定理和结论, 解答下列问题:

设二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象与 x 轴的两个交点为 $A(x_1, 0), B(x_2, 0)$, 抛物线的顶点为 C , 显然 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

(1) 当 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形时, 求 $b^2 - 4ac$ 的值;

(2) 当 $\triangle ABC$ 为等边三角形时, $b^2 - 4ac =$ _____.

(3) 设抛物线 $y = x^2 + kx + 1$ 与 x 轴的两个交点为 A, B , 顶点为 C , 且 $\angle ACB = 90^\circ$, 试问如何平移此抛物线, 才能使 $\angle ACB = 60^\circ$.

例 9. 若三个非零实数 x, y, z 满足: 只要其中一个数的倒数等于另外两个数的倒数的和, 则称这三个实数 x, y, z 构成“和谐三组数”.

(1) 实数 1, 2, 3 可以构成“和谐三组数”吗? 请说明理由;

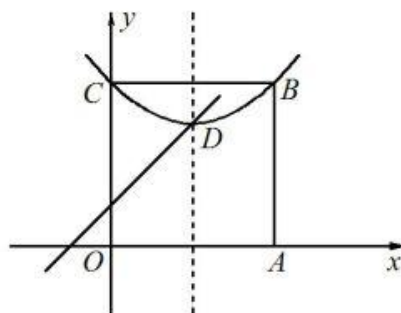
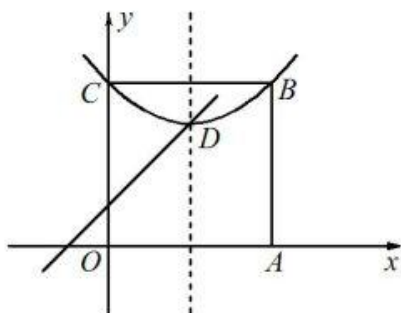
(2) 若 $M(t, y_1), N(t+1, y_2), R(t+3, y_3)$ 三点均在函数 $y = \frac{k}{x} (k \text{ 为常数}, k \neq 0)$ 的图象上, 且这三点的纵坐标 y_1, y_2, y_3 构成“和谐三组数”, 求实数 t 的值;

(3) 若直线 $y = 2bx + 2c (bc \neq 0)$ 与 x 轴交于点 $A(x_1, 0)$, 与抛物线 $y = ax^2 + 3bx + 3c (a \neq 0)$ 交于 $B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ 两点.

① 求证: A, B, C 三点的横坐标 x_1, x_2, x_3 构成“和谐三组数”.

② 若 $a > 2b > 3c, x_2 = 1$, 求点 $P\left(\frac{c}{a}, \frac{b}{a}\right)$ 与原点 O 的距离 OP 的取值范围.

例 10. 在平面直角坐标系中, 经过某点且平行于坐标轴或平行于两坐标轴夹角平分线的直线, 叫该点的“特征线” 例如, 点 $M(1, 3)$ 的特征线有: $x=1, y=3, y=x+2, y=-x+4$.



备用图

如图, 在平面直角坐标系中有正方形 $OABC$, 点 B 在第一象限, A, C 分别在 x 轴和 y 轴上, 抛物线 $y = \frac{1}{4}(x-m)^2 + n$ 经过 B, C 两点, 顶点 D 在正方形内部.

(1) 直接写出点 $D(m, n)$ 所有的特征线:

(2) 若点 D 有一条特征线是 $y = x + 1$, 求此抛物线的解析式.

(3) 点 P 是 AB 边上除点 A 外的任意一点, 连接 OP , 将 $\triangle OAP$ 沿着 OP 折叠, 点 A 落在点 A' 的位置, 当点 A' 在平行于坐标轴的 D 点的特征线上时, 满足(2)中条件的抛物线向下平移多少距离, 其顶点落在 OP 上?

例 11 阅读下列两则材料，回答问题

材料一：我们将 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ 与 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ 称为一对“对偶式”

因为 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b$ ，所以构造“对偶式”相乘可以有效地将 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ 和 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ 中的“ $-$ ”去掉

例如：已知 $\sqrt{25-x}-\sqrt{15-x}=2$ ，求 $\sqrt{25-x}+\sqrt{15-x}$ 的值。

解： $(\sqrt{25-x}-\sqrt{15-x}) \times (\sqrt{25-x}+\sqrt{15-x}) = (25-x) - (15-x) = 10$

$\therefore \sqrt{25-x}-\sqrt{15-x}=2$ ，

$\therefore \sqrt{25-x}+\sqrt{15-x}=5$

材料二：如图，点 $A(x_1, y_1)$ ，点 $B(x_2, y_2)$ ，以 AB 为斜边作 $Rt\triangle ABC$ ，

则 $C(x_2, y_1)$ ，于是 $AC=|x_1-x_2|$ ， $BC=|y_1-y_2|$ ，所以

$$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

反之，可将代数式 $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ 的值看作点 (x_1, y_1) 到点 (x_2, y_2) 的距离。例如

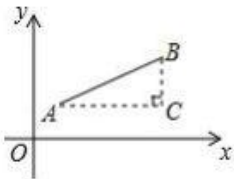
$$\sqrt{x^2-2x+y^2+2y+2}=\sqrt{(x^2-2x+1)+(y^2+2y+1)}=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+[y-(-1)]^2}$$

所以可将代数式 $\sqrt{x^2-2x+y^2+2y+2}$ 的值看作点 (x, y) 到点 $(1, -1)$ 的距离。

(1) 利用材料一，解关于 x 的方程： $\sqrt{20-x}-\sqrt{4-x}=2$ ，其中 $x \leq 4$ ；

(2) ①利用材料二，求代数式 $\sqrt{x^2-2x+y^2-16y+65}+\sqrt{x^2+4x+y^2-4y+8}$ 的最小值，并求出此时 y 与 x 的函数关系式，写出 x 的取值范围；

②将①所得的 y 与 x 的函数关系式和 x 的取值范围代入 $y=\sqrt{2x^2+5x+12}+\sqrt{2x^2+3x+6}$ 中解出 x ，直接写出 x 的值。



例 12 “构造图形解题”，它的应用十分广泛，特别是有些技巧性很强的题目，如果不能发现题目中所隐含的几何意义，而用通常的代数方法去思考，经常让我们手足无措，难以下手，这时，如果能转换思维，发现题目中隐含的几何条件，通过构造适合的几何图形，将会得到事半功倍的效果，下面介绍两则实例：

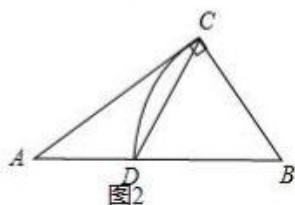
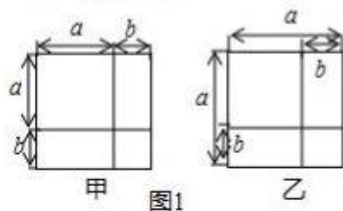
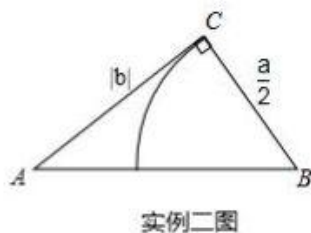
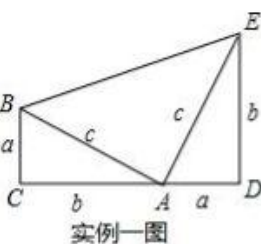
实例一：1876 年，美国总统伽菲尔德利用实例一图证明了勾股定理：由 $S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADE} + S_{\triangle ABE}$ 得： $\frac{1}{2}(a+b)^2 = 2 \times \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2$ ，化简得： $a^2 + b^2 = c^2$ 。

实例二：欧几里得的《几何原本》记载，关于 x 的方程 $x^2 + ax = b^2$ 的图解法是：画 $\text{Rt}\triangle ABC$ ，使 $\angle ACB = 90^\circ$ ， $BC = \frac{a}{2}$ ， $AC = |b|$ ，再在斜边 AB 上截取 $BD = \frac{a}{2}$ ，则 AD 的长就是该方程的一个正根（如实例二图）。

请根据以上阅读材料回答下面的问题：

（1）如图 1，请利用图形中面积的等量关系，写出甲图要证明的数学公式是_____，乙图要证明的数学公式是_____，体现的数学思想是_____；

（2）如图 2，若 2 和 -8 是关于 x 的方程 $x^2 + ax = b^2$ 的两个根，按照实例二的方式构造 $\text{Rt}\triangle ABC$ ，连接 CD ，求 CD 的长；



例 13 阅读下列两则材料，回答问题，

材料一：定义直线 $y=ax+b$ 与直线 $y=bx+a$ 互为“互助直线”，例如，直线 $y=x+4$ 与直线 $y=4x+1$ 互为“互助直线”

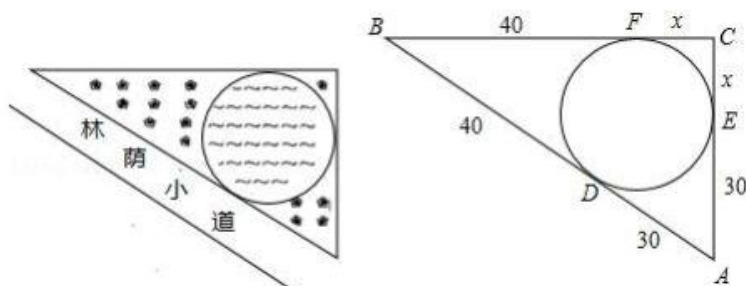
材料二：对于平面直角坐标系中的任意两点 $P_1(x_1, y_1)$ 、 $P_2(x_2, y_2)$ ， P_1 、 P_2 两点间的直角距离 $d(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ 。例如： $Q_1(-3, 1)$ 、 $Q_2(2, 4)$ 两点间的直角距离为 $d(Q_1, Q_2) = |-3 - 2| + |1 - 4| = 8$

设 $P_0(x_0, y_0)$ 为一个定点， $Q(x, y)$ 是直线 $y=ax+b$ 上的动点，我们把 $d(P_0, Q)$ 的最小值叫做 P_0 到直线 $y=ax+b$ 的直角距离。

(1) 计算 $S(-1, 6)$ 、 $T(-2, 3)$ 两点间的直角距离 $d(S, T) = \underline{\hspace{2cm}}$ ，直线 $y=2x+3$ 上的一点 $H(a, b)$ 又是它的“互助直线”上的点，求点 H 的坐标。

(2) 对于直线 $y=ax+b$ 上的任意一点 $M(m, n)$ ，都有点 $N(3m, 2m - 3n)$ 在它的“互助直线”上，试求点 $L(5, -\frac{1}{3})$ 到直线 $y=ax+b$ 的直角距离。

例 14 寒冷冬季，泡温泉成了市民热衷的娱乐方式之一，渝北统景温泉风景区新增一个圆形的儿童蘑菇池以满足人们的亲子需求，为避免儿童蘑菇池对景区现有道路带来影响，最终决定将儿童蘑菇池修建在含有直角并与林荫小道所围成的直角三角形花园中，设计时，景区负责人表示希望儿童蘑菇池尽可能容纳更多小朋友，于是设计师决定让儿童蘑菇池与直角三角形花园的三边相切，得到如下设计图，并实地确定出 D 点位置，测量出 $AD=30$ 米， $BD=40$ 米。通过查阅资料得知：从圆外一点可以引圆的两条切线，它们的切线长相等，这一点和圆心的连线平分两条切线所组成的夹角。



于是，设 $\triangle ABC$ 的内切圆分别与 AC 、 BC 相切于点 E 、 F ， $CE=x$ ，根据资料知： $AE=AD=30$ ， $BF=BD=40$ ， $CF=CE=x$

根据勾股定理，得： $(x+30)^2 + (x+40)^2 = (30+40)^2$

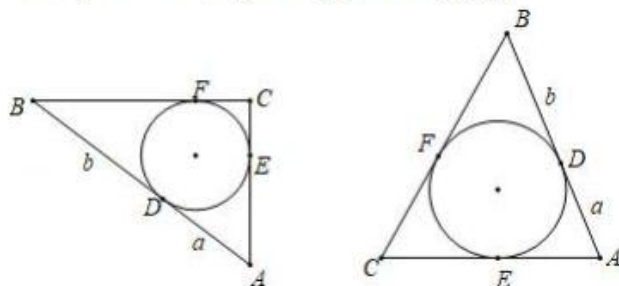
整理得： $x^2 + 70x = 1200$

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2}(x+30)(x+40) = \frac{1}{2}(x^2 + 70x + 1200) = 1200$

设计师发现，1200 恰好就是 30×40 ，即 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的面积等于 AD 与 BD 的积！这仅仅是巧合吗？请你帮他完成下面的探索。

已知 $\triangle ABC$ 的内切圆与 AB 相切于点 D ， $AD=a$ ， $BD=b$

- (1) 若 $\angle C=90^\circ$ ，求证： $S_{\triangle ABC}=ab$ ；
- (2) 当 $AC \cdot BC=2ab$ ，求证： $\angle C=90^\circ$ ；
- (3) 若 $\angle C=60^\circ$ ，用 a 、 b 表示 $\triangle ABC$ 的面积。



例 15 阅读与应用：同学们：你们已经知道 $(a-b)^2 \geq 0$ ，即 $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$ 。

$\therefore a^2 + b^2 \geq 2ab$ （当且仅当 $a=b$ 时取等号）。

阅读 1：若 a, b 为实数，且 $a > 0, b > 0$ ， $\therefore (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ ， $\therefore a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$

$\therefore a + b \geq 2\sqrt{ab}$ （当且仅当 $a=b$ 时取等号）。

阅读 2：若函数 $y = x + \frac{m}{x}$ ($m > 0, x > 0, m$ 为常数)，由阅读 1 结论可知：

$$x + \frac{m}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{m}{x}} \text{ 即 } x + \frac{m}{x} \geq 2\sqrt{m}.$$

\therefore 当 $x = \frac{m}{x}$ ，即 $x^2 = m$ ， $\therefore x = \sqrt{m}$ ($m > 0$) 时，函数 $y = x + \frac{m}{x}$ 的最小值为 $2\sqrt{m}$ 。

阅读理解上述内容，解答下列问题：

问题 1：若函数 $y = a - 1 + \frac{9}{a-1}$ ($a > 1$)，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 时，函数 $y = a - 1 + \frac{9}{a-1}$ ($a > 1$) 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ ；

问题 2：已知一个矩形的面积为 4，其中一边长为 x ，则另一边长为 $\frac{4}{x}$ ，周长为 $2(x + \frac{4}{x})$ ，求当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时，周长的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ ；

问题 3：求代数式 $\frac{m^2 + 2m + 5}{m+1}$ ($m > -1$) 的最小值。

例 16 请阅读以下材料，并解决相应的问题：

材料一：换元法是数学中的重要方法，利用换元法可以从形式上简化式子，在解某些特殊方程时，使用换元法常常可以达到转化与化归的目的，例如在求解一元四次方程 $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ 时，令 $x^2 = t$ ，则原方程可变为 $t^2 - 2t + 1 = 0$ ，解得 $t = 1$ ，从而得到原方程的解为 $x = \pm 1$ 。

材料二：杨辉三角形是中国数学史上的一个伟大成就，在中国南宋数学家杨辉 1261 年所著的《详解九章算法》一书中出现。它呈现了某些特定系数在三角形中的一种有规律的几何排列。如图为杨辉三角形：

(1) 利用换元法解方程： $(x^2 + 3x - 1)^2 + 2(x^2 + 3x - 1) = 3$

(2) 在杨辉三角形中，按照由上至下、从左到右的顺序观察，设 a_n 是第 n 行的第 2 个数（其中 $n \geq 4$ ），

b_n 是第 n 行的第 3 个数， c_n 是第 $(n-1)$ 行的第 3 个数。请利用换元法因式分解： $4(b_n - a_n) \cdot c_{n+1}$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

例 17 阅读材料，回答问题：

对三个实数 x, y, z ，记 $M\{x, y, z\}$ 为它们中最大的数，记 $N\{x, y, z\}$ 为这三个数中位数，如 $M\{-2, 1, 4\}=4$ ， $M\{-2, 8, 8\}=8$ ， $N\{2, 1, -1\}=1$ ， $N\{6, 6, 1\}=6$ ，

(1) 填空： $M\{3, 2, \pi\}=\underline{\hspace{2cm}}$ ；若 $N\{2a-2, 4, 5\}=4$ ，则 a 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 若 $M\{2a-3, -3a+2, 5\}=5$ ，求 a 的取值范围。

(3) 若方程 $M\{t^2+4, t^2-2, 8\}=8$ ， $N\{t^2+4, t^2-2, 8\}=2$ 成立，且关于 x 的二次函数 $y=(b+c+1)x^2-(4b+2)x+4b$ 的函数值恒为非负数，当 bc 取最小值且 b, c 满足 $\frac{b}{c}=t^2$ 时，求 b, c 的值。

例 18 《见微知著》谈到：从一个简单的经典问题出发，从特殊到一般，由简单到复杂：从部分到整体，由低维到高维，知识与方法上的类比是探索发展的重要途径，是思想闸门发现新问题、新结论的重要方法。阅读材料一：

利用整体思想解题，运用代数式的恒等变形，使不少依照常规思路难以解决的问题找到简便解决方法，常用的途径有：(1) 整体观察；(2) 整体设元；(3) 整体代入；(4) 整体求和等。

例如， $ab=1$ 求证： $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}=1$

证明：原式 $=\frac{ab}{ab+a}+\frac{1}{1+b}=\frac{b}{1+b}+\frac{1}{1+b}=1$

波利亚在《怎样解题》中指出：“当你找到第一个蘑菇或作出第一个发现后，再四处看看，他们总是成群生长”类似问题，我们有更多的式子满足以上特征。

阅读材料二：

基本不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ ($a>0, b>0$)，当且仅当 $a=b$ 时等号成立，它是解决最值问题的有力工具。

例如：在 $x>0$ 的条件下，当 x 为何值时， $x+\frac{1}{x}$ 有最小值，最小值是多少？

解： $\because x>0, \frac{1}{x}>0, \therefore \frac{x+\frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}$ ，即 $x+\frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}$ ， $\therefore x+\frac{1}{x} \geq 2$

当且仅当 $x=\frac{1}{x}$ ，即 $x=1$ 时， $x+\frac{1}{x}$ 有最小值，最小值为 2。

请根据阅读材料解答下列问题：

(1) 已知 $ab=1$ ，求下列各式的值：

① $\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}=\underline{\hspace{2cm}}$ ；

② $\frac{1}{1+a^n}+\frac{1}{1+b^n}=\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 若 $abc=1$ ，解方程 $\frac{5ax}{ab+a+1}+\frac{5bx}{bc+b+1}+\frac{5cx}{ca+c+1}=1$

(3) 若正数 a, b 满足 $ab=1$ ，求 $M=\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+2b}$ 的最小值。

例 19 请阅读下列材料：

问题：已知方程 $x^2+x-1=0$ ，求一个一元二次方程，使它的根分别是已知方程根的 2 倍。

解：设所求方程的根为 y ，则 $y=2x$ ，所以 $x=\frac{y}{2}$ 。

把 $x=\frac{y}{2}$ 代入已知方程，得 $(\frac{y}{2})^2+\frac{y}{2}-1=0$ 。

化简，得 $y^2+2y-4=0$

故所求方程为 $y^2+2y-4=0$ 。

这种利用方程的代换求新方程的方法，我们称为“换根法”。

请用阅读材料提供的“换根法”求新方程（要求：把所求方程化为一般形式）。

（1）已知方程 $x^2+x-2=0$ ，求一个一元二次方程，使它的根分别是已知方程根的相反数，则所求方程为：_____。

（2）已知方程 $2x^2-7x+3=0$ ，求一个一元二次方程，使它的根分别是已知方程根的倒数。

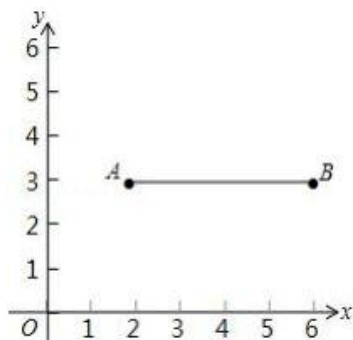
（3）已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的两个实数根分别为 3，-2，求一元二次方程 $cx^2+bx+a=0$ 的两根。（直接写出结果）

例 20 如图，在平面直角坐标系中，已知点 $A(2, 3)$ 、 $B(6, 3)$ ，连结 AB 。若对于平面内一点 P ，线段 AB 上都存在点 Q ，使得 $PQ \leq 1$ ，则称点 P 是线段 AB 的“邻近点”。

（1）判断点 $D(\frac{7}{5}, \frac{19}{5})$ ，是否线段 AB 的“邻近点”_____（填“是”或“否”）；

（2）若点 $H(m, n)$ 在一次函数 $y=x-1$ 的图象上，且是线段 AB 的“邻近点”，求 m 的取值范围；

（3）若一次函数 $y=x+b$ 的图象上至少存在一个邻近点，直接写出 b 的取值范围。



例 21 小明利用函数与不等式的关系，对形如 $(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) > 0$

(n 为正整数) 的不等式的解法进行了探究.

(1) 下面是小明的探究过程，请补充完整：

①对于不等式 $x - 3 > 0$ ，观察函数 $y = x - 3$ 的图象可以得到如表格：

x 的范围	$x > 3$	$x < 3$
y 的符号	+	-

由表格可知不等式 $x - 3 > 0$ 的解集为 $x > 3$.

②对于不等式 $(x - 3)(x - 1) > 0$ ，观察函数 $y = (x - 3)(x - 1)$ 的图象可以得到如表表格：

x 的范围	$x > 3$	$1 < x < 3$	$x < 1$
y 的符号	+	-	+

由表格可知不等式 $(x - 3)(x - 1) > 0$ 的解集为_____.

③对于不等式 $(x - 3)(x - 1)(x + 1) > 0$ ，请根据已描出的点画出函数 $y = (x - 3)(x - 1)(x + 1)$ 的图象：

观察函数 $y = (x - 3)(x - 1)(x + 1)$ 的图象补全下面的表格：

x 的范围	$x > 3$	$1 < x < 3$	$-1 < x < 1$	$x < -1$
y 的符号	+	-	_____	_____

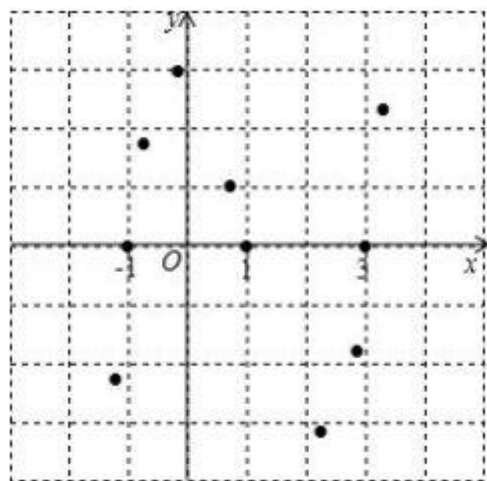
由表格可知不等式 $(x - 3)(x - 1)(x + 1) > 0$ 的解集为_____.

小明将上述探究过程总结如下：对于解形如 $(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) > 0$ (n 为正整数) 的不等式，先将 x_1, x_2, \dots, x_n 按从大到小的顺序排列，再划分 x 的范围，然后通过列表格的办法，可以发现表格中 y 的符号呈现一定的规律，利用这个规律可以求这样的不等式的解集.

(2) 请你参考小明的方法，解决下列问题：

①不等式 $(x - 6)(x - 4)(x - 2)(x + 2) > 0$ 的解集为_____.

②不等式 $(x - 9)(x - 8)(x - 7)^2 > 0$ 的解集为_____.



例 22 阅读材料：各类方程的解法

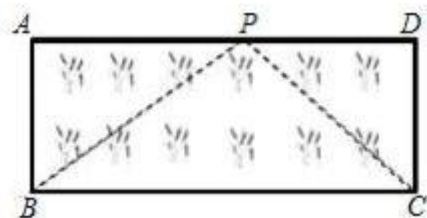
求解一元一次方程，根据等式的基本性质，把方程转化为 $x=a$ 的形式。求解二元一次方程组，把它转化为一元一次方程来解；类似的，求解三元一次方程组，把它转化为解二元一次方程组。求解一元二次方程，把它化为两个一元一次方程来解。求解分式方程，把它转化为整式方程来解，由于“去分母”可能产生增根，所以解分式方程必须检验。各类方程的解法不尽相同，但是它们有一个共同的基本数学思想——转化，把未知转化为已知。

用“转化”的数学思想，我们还可以解一些新的方程。例如，一元三次方程 $x^3+x^2-2x=0$ ，可以通过因式分解把它转化为 $x(x^2+x-2)=0$ ，解方程 $x=0$ 和 $x^2+x-2=0$ ，可得方程 $x^3+x^2-2x=0$ 的解。

(1) 问题：方程 $x^3+x^2-2x=0$ 的解是 $x_1=0$ ， $x_2=$ _____， $x_3=$ _____；

(2) 拓展：用“转化”思想求方程 $\sqrt{2x+3}=x$ 的解；

(3) 应用：如图，已知矩形草坪 $ABCD$ 的长 $AD=8m$ ，宽 $AB=3m$ ，小华把一根长为 $10m$ 的绳子的一端固定在点 B ，沿草坪边沿 BA ， AD 走到点 P 处，把长绳 PB 段拉直并固定在点 P ，然后沿草坪边沿 PD 、 DC 走到点 C 处，把长绳剩下的一段拉直，长绳的另一端恰好落在点 C 。求 AP 的长。



例 23 在数学的世界里，有很多结论的形式是统一的，这也体现了数学的美。

(1) 如图 1，在平面直角坐标系中，直线 $y=\frac{1}{2}x+3$ 与抛物线 $y=x^2$ 相交于点 A 、 B ，与 x 轴交于点 C ， A 点横坐标为 x_1 ， B 点横坐标为 x_2 ($x_1 < x_2$)， C 点横坐标为 x_3 。请你计算 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ 与 $\frac{1}{x_3}$ 的值，并判断它们的数量关系。

(2) 请你在下列两组条件中选择一组，证明 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ 与 $\frac{1}{x_3}$ 仍具有 (1) 中的数量关系。

①如图 2， $\angle APC=120^\circ$ ， PB 平分 $\angle APC$ ，直线 l 与 PA 、 PB 、 PC 分别交于点 A 、 B 、 C ， $PA=x_1$ ， $PC=x_2$ ， $PB=x_3$ 。

②如图 3，在平面直角坐标系中，过点 $A(x_1, 0)$ 、 $B(0, x_2)$ ($x_1 > 0$ ， $x_2 > 0$)，作直线 l ，与直线 $y=x$ 交于点 C ，点 C 横坐标为 x_3 。

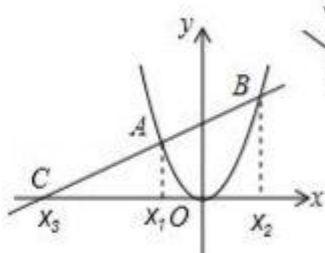


图1

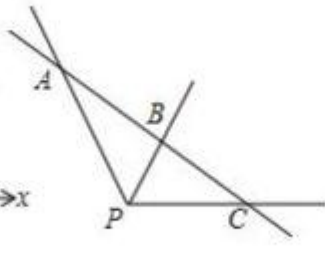


图2

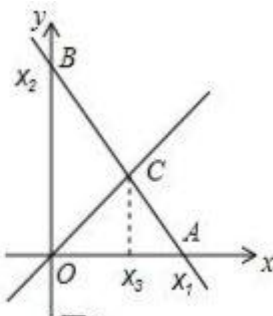


图3

例 24 我们知道平方运算和开方运算是互逆运算，如： $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ ，那么 $\sqrt{a^2 \pm 2ab + b^2} = |a \pm b|$ ，那么如何将双重二次根式 $\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}}$ ($a > 0, b > 0, a \pm 2\sqrt{b} > 0$) 化简呢？如能找到两个数 m, n ($m > 0, n > 0$)，使得 $(\sqrt{m})^2 + (\sqrt{n})^2 = a$ 即 $m+n=a$ ，且使 $\sqrt{m} \cdot \sqrt{n} = \sqrt{b}$ 即 $m \cdot n = b$ ，那么 $a \pm 2\sqrt{b} = (\sqrt{m})^2 + (\sqrt{n})^2 \pm 2\sqrt{m} \cdot \sqrt{n} = (\sqrt{m} \pm \sqrt{n})^2$ ， $\therefore \sqrt{a \pm 2\sqrt{b}} = \sqrt{m} \pm \sqrt{n}$ ，双重二次根式得以化简；

例如化简： $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ ： $\because 3=1+2$ 且 $2=1 \times 2$ ， $\therefore 3+2\sqrt{2} = (\sqrt{1})^2 + (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{1} \times \sqrt{2}$ ， $\therefore \sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$

由此对于任意一个二次根式只要可以将其化成 $\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}}$ 的形式，且能找到 m, n ($m > 0, n > 0$) 使得 $m+n=a$ ，且 $m \cdot n = b$ ，那么这个双重二次根式一定可以化简为一个二次根式。请同学们通过阅读上述材料，完成下列问题：

(1) 填空： $\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ； $\sqrt{12+2\sqrt{35}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

(2) 化简：① $\sqrt{9+6\sqrt{2}}$ ② $\sqrt{16-4\sqrt{15}}$

(3) 计算： $\sqrt{3-\sqrt{5}} + \sqrt{2+\sqrt{3}}$ 。

例 25 阅读材料：各类方程的解法

求解一元二次方程，把它转化为两个一元一次方程来解。求解分式方程，把它转化为整式方程来解，由于“去分母”可能产生增根，所以解分式方程必须检验。各类方程的解法不尽相同，但是它们有一个共同的基本数学思想“转化”，把未知转化为已知。

用“转化”的数学思想，我们还可以解一些新的方程。例如，一元三次方程 $x^3 - x^2 - 2x = 0$ ，可以通过因式分解把它转化为 $x(x^2 - x - 2) = 0$ ，解方程 $x = 0$ 和 $x^2 - x - 2 = 0$ ，可得方程 $x^3 - x^2 - 2x = 0$ 的解。

(1) 问题：方程 $x^3 - x^2 - 2x = 0$ 的解是 $x_1 = 0$ ， $x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

(2) 拓展：用“转化”思想求方程 $\sqrt{3x+4} = x$ 的解。

例 26 初中数学代数知识中，方程、函数、不等式存在着紧密的联系，请阅读下列两则材料，回答问题：
材料一：

利用函数图象找方程 $x^2 - x + 1 = 0$ 的解的范围，设函数 $y = x^2 - x + 1$ ，当 $x = -2$ 时， $y = -5 < 0$ ；当 $x = -1$ 时， $y = 1 > 0$ 。则函数 $y = x^2 - x + 1$ 的图象经过两个点 $(-2, -5)$ 与 $(-1, 1)$ ，而 $(-2, -5)$ 在 x 轴下方，点 $(-1, 1)$ 在 x 轴上方，则该函数图象与 x 轴交点横坐标必大于 -2 ，小于 -1 。故，方程 $x^2 - x + 1 = 0$ 有解，且该解的范围为 $-2 < x < -1$ 。

材料二：

解一元二次不等式 $(x-1)(x+2) < 0$ 。由“异号两数相乘，结果为负”可得：

$$\text{情况 (1)} \quad \begin{cases} (x-1) < 0 \\ (x+2) > 0 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} x < 1 \\ x > -2 \end{cases}, \text{ 则 } -2 < x < 1$$

$$\text{情况 (2)} \quad \begin{cases} (x-1) > 0 \\ (x+2) < 0 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} x > 1 \\ x < -2 \end{cases}, \text{ 则无解}$$

故， $(x-1)(x+2) < 0$ 得解集为 $-2 < x < 1$

(1) 请根据材料一解决问题，已知方程 $-x^2 + 2x - 5 = 0$ 有唯一解 x_0 ，且 $a < x_0 < a+1$ (a 为整数)，求整数 a 的值。

(2) 请结合材料一与材料二解决问题：若关于 x 的方程 $mx^2 - (m+1)x - 4 = 0$ 的解分别为 x_1, x_2 ，且 $-1 < x_1 < 0, 2 < x_2 < 3$ ，求 m 的取值范围。

例 27 平面直角坐标系在代数和几何之间架起了一座桥梁，实现了几何方法与代数方法的结合，使数与形统一了起来，在平面直角坐标系中，已知点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，则 A、B 两点之间的距离可以表示为 $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ ，例如 $A(2, 1), B(-1, 2)$ ，则 A、B 两点之间的距离可以表示为 $AB = \sqrt{(2+1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{10}$ ；反之，代数式 $\sqrt{(5-1)^2 + (1+2)^2}$ 也可以看作平面直角坐标系中点 $C(5, 1)$ 与点 $D(1, -2)$ 之间的距离。

(1) 已知点 $M(-7, 6), N(1, 0)$ ，则 M、N 两点之间的距离为_____

(2) 求代数式 $\sqrt{(x+1)^2 + (0-7)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (0-5)^2}$ 的最小值：

(3) 求代数式 $AB = \sqrt{x^2 - 4x + 13} + \sqrt{x^2 + x + \frac{17}{4}}$ 取最大值时， x 的取值

例 28 著名数学教育家波利亚说：“对一个数学问题，改变它的形式，变换它的结构，知道发现有价值的东西，这是数学解题的一个重要原则。”

材料一：平方运算和开方运算是互逆运算，如： $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ ，那么 $\sqrt{a^2 \pm 2ab + b^2} = |a \pm b|$ ，

那么如何将双重二次根式 $\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}}$ ($a > 0, b > 0, a \pm 2\sqrt{b} > 0$) 化简呢？如能找到两个数 m, n ($m > 0, n > 0$)，使得 $(\sqrt{m})^2 + (\sqrt{n})^2 = a$ 即 $m+n=a$ ，且使 $\sqrt{m} \cdot \sqrt{n} = \sqrt{b}$ 即 $m \cdot n = b$ ，那么 $a \pm 2\sqrt{b} = (\sqrt{m})^2 + (\sqrt{n})^2 \pm 2\sqrt{m} \cdot \sqrt{n} = (\sqrt{m} \pm \sqrt{n})^2$ ， $\therefore \sqrt{a \pm 2\sqrt{b}} = |\sqrt{m} \pm \sqrt{n}|$ ，双重二次根式得以化简：

例如化简： $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ ： $\because 3=1+2$ 且 $2=1 \times 2$ ， $\therefore 3+2\sqrt{2} = (\sqrt{1})^2 + (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{1} \times \sqrt{2}$ ， $\therefore \sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$

材料二：在直角坐标系 xOy 中，对于点 $P(x, y)$ 和给 $Q(x, y')$ 出如下定义：

若 $y' = \begin{cases} y(x \geq 0) \\ -y(x < 0) \end{cases}$ 则称点 Q 为点 P 的“横负纵变点”

例如：点 $(3, 2)$ 的“横负纵变点”为 $(3, 2)$

点 $P(-2, 5)$ 的“横负纵变点”为 $(-2, -5)$

问题：

(1) 请直接写出点 $(-3\sqrt{3}, -2)$ 的“横负纵变点”为_____；化简 $\sqrt{9-2\sqrt{14}} =$ _____

(2) 点 M 为一次函数 $y = -x + 1$ 图象上的点， M' 为点 M 的横负纵变点，已知 $M(1, 1)$ ，若 $MM' = \sqrt{13}$ 。

求点 M 的坐标。

(3) 已知 b 为常数且 $1 \leq b \leq 2$ ，点 P 在函数 $y = -x^2 + 16(\sqrt{b+2\sqrt{b-1}} + \sqrt{b-2\sqrt{b-1}})$ ($-7 \leq x \leq a$) 的图

象上，其“横负纵变点”的纵坐标 y' 的取值范围是 $-32 < y' \leq 32$ ，若 a 为偶数，求 a 的值。

例 29 1637 年笛卡尔在《几何学》中，首次应用待定系数法 4 次方程分解为两个 2 次方程求解，并最早给出因式分解定理。

他认为，若一个高于二次的关于 x 的多项式能被 $(x-a)$ 整除，则其一定可以分解为 $(x-a)$ 与另外一个整式的乘积，而且令这个多项式的值为 0 时， $x=a$ 是关于 x 的这个方程的一个根。

例如：多项式 $x^2+9x-10$ 可以分解为 $(x-1)$ 与另外一个整式 M 的乘积，即 $x^2+9x-10=(x-1)\bullet M$ ，令

$x^2+9x-10=0$ 时，可知 $x=1$ 为该方程的一个根。

关于笛卡尔的“待定系数法”原理，举例说明如下：

分解因式： x^3+2x^2-3

观察可知 $x=1$ 时，原式 $=0$ 因此原式可分解为 $(x-1)$ 与另一个整式的积。

令 $x^3+2x^2-3=(x-1)(x^2+bx+c)$

则 $x^3+2x^2-3=x^3+(b-1)x^2+(c-b)x-c$ ，因等式两边 x 同次幂的系数相等，则有：

$$\begin{cases} b-1=2 \\ c-b=0 \\ -c=-3 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} b=3 \\ c=3 \end{cases}, \text{ 从而 } x^3+2x^2-3=(x-1)(x^2+3x+3)。$$

此时，不难发现 $x=1$ 是方程 $x^3+2x^2-3=0$ 的一个根。

根据以上材料，理解并运用材料提供的方法，解答以下问题：

- (1) 若 $x+1$ 是多项式 x^3+ax+1 的因式，求 a 的值并将多项式 x^3+ax+1 分解因式。
- (2) 若多项式 $3x^4+ax^3+bx-34$ 含有因式 $x+1$ 及 $x-2$ ，求 $a+b$ 的值。
- (3) 若多项式 $6x^2-xy-2y^2+5x-8y+a$ 可以分解为两个一次因式之积，求 a 的值并将该多项式分解因式。

例 30 阅读材料：求解一元一次方程，需要根据等式的基本性质，把方程转化为 $x=a$ 的形式，求解二元一次方程组，需要通过消元把它转化为一元一次方程来解，求解三元一次方程组，需要把它转化为二元一次方程组来解，求一元二次方程，需要把它转化为两个一元一次方程来解，求解分式方程，需要通过去分母把它转化为整式方程来解。各类方程的解法不尽相同，但是它们都用到一种共同的基本数学思想——转化，即把未知转化为已知来求解。

用转化的数学思想，我们还可以解一些新的方程。

例如，解一元三次方程 $x^3 + x^2 - 2x = 0$ ，通过因式分解把它转化为 $x(x^2 + x - 2) = 0$ ，通过解方程 $x = 0$ 和 $x^2 + x - 2 = 0$ ，可得原方程 $x^3 + x^2 - 2x = 0$ 的解。

再例如，解根号下含有未知数的方程： $\sqrt{2x+3} = x$ ，通过两边同时平方把它转化为 $2x+3 = x^2$ ，解得：

$x_1 = 3, x_2 = -1$ 。因为 $2x+3 \geq 0$ ，且 $x \geq 0$ ，所以 $x = -1$ 不是原方程的根， $x = 3$ 是原方程的解。

(1) 问题：方程 $x^3 + x^2 - 2x = 0$ 的解是 $x_1 = 0$ ， $x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) 拓展：求方程 $\sqrt{3x^2 - 3x - 2} = x - 1$ 的解

(3) 应用：再一个边长为 1 的正方形构造一个如图所示的正方形：在正方形 $ABCD$ 边上依次截取 $AE = BF = CG = DH = \frac{1}{n}$ ，连接 AG, BH, CE, DF ，得到正方形 $MNPQ$ 。若小正方形 $MNPQ$ （图中阴影部分）的边长为 $\frac{\sqrt{145}}{145}$ ，求 n 的值。

